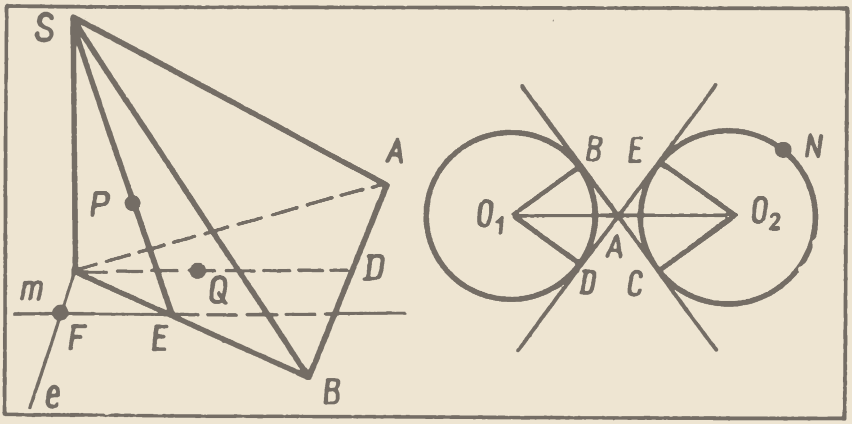
Библиотечка абитуриента

М.К. Потапов, С.Н. Олехник
Ю.В. Нестеренко

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

МАТЕМАТИКА

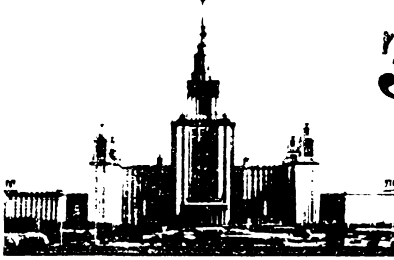


МГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1992

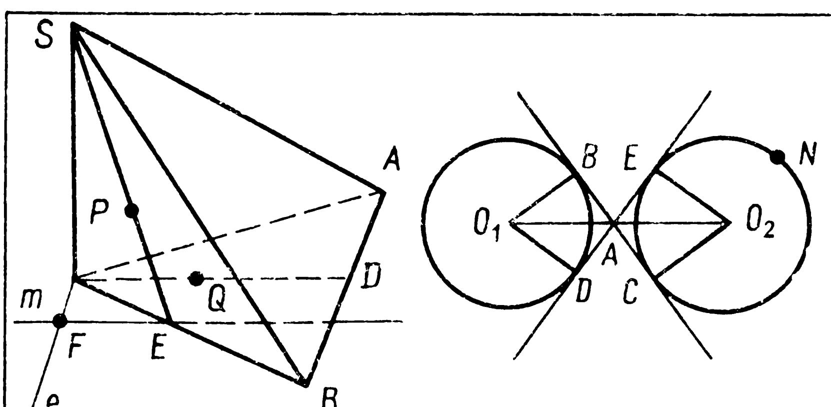
Библиотечка абитуриента

М.К. Потапов, С.Н. Олехник
Ю.В. Нестеренко

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ



МАТЕМАТИКА



МГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1992

ББК 22.1
П64
УДК 514.112

Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В.
П64 Планиметрические задачи. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 16с. – (Библиотечка абитуриента: Математика)
ISBN 5-211-02671-3.

В выпуске рассматриваются методы решения задач по планиметрии, приводятся необходимые теоретические сведения, а также многочисленные примеры из практики вступительных экзаменов в вузы.

Для школьников, абитуриентов, слушателей подготовительных отделений вузов, учителей.

П $\frac{4306020500-041}{077(02)-92}$ КБ–46–74–1991 ББК 22.1

Учебное издание

ПОТАПОВ Михаил Константинович
ОЛЕХНИК Слав Николаевич
НЕСТЕРЕНКО Юрий Валентинович

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Редактор А.И. Камзолов
Художественный редактор Л.В. Мухина

ИБ № 6521

Подписано в печать 25.02.92. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная №2. Офсетная печать.
Усл.печ.л. 1,0 Уч.-изд.л. 1,14 Тираж 53000 экз.
Заказ 159 Изд. № 2552.

Ордена "Знак Почета" Издательство Московского университета
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7

Набор выполнен на компьютерах в ордена "Знак Почета" издательстве Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
ПП „Чертановская типография" Мосгорпечать
113545, Москва, Варшавское шоссе, 129а

ISBN 5-211-02671-3

ВВЕДЕНИЕ

Как правило, ни один вступительный экзамен в вуз по математике не обходится без планиметрических задач, т.е. задач по геометрии на плоскости. Именно таким задачам посвящен настоящий выпуск.

Невозможно указать два – три и даже пять методов, освоив которые, абитуриент научился бы решать все геометрические задачи. Они всегда непредсказуемы. В этом сложность геометрических задач, их отличие от большинства школьных алгебраических задач. Но в этом заключается и их прелесть. Каждая геометрическая задача требует индивидуального подхода, определенной доли изобретательности и интуиции. Конечно же, для решения таких задач необходимо твердо знать теоремы школьного курса. Но этого мало. Нужно уметь применять эти теоремы, и каждый раз в новой ситуации. Такое умение приобретается с опытом решения задач. Именно эти знания и этот опыт служат базой, на которую опираются и интуиция, и изобретательность.

Отметим, что хотя доказательство и является наиболее трудной частью решения геометрических задач, как правило, планиметрические задачи на вступительных экзаменах не требуют изощренных обоснований, особой изворотливости ума и посильны школьнику, твердо владеющему школьной программой по геометрии.

Настоящий выпуск в основном посвящен решению вычислительных задач по планиметрии. В нем собраны наиболее часто встречающиеся, типичные "одноходовые" рассуждения, из которых, как из кирпичиков, складываются более сложные и длинные решения. Одновременно приводятся необходимые теоремы, они в тексте выделены курсивом. Задачи подобраны так, что этот список утверждений, рассредоточенный по всему выпуску, охватывает практически все теоремы школьного курса планиметрии, необходимые для решения задач. Чтение предлагаемой брошюры должно напоминать эти теоретические положения и, с другой стороны, сформировать в активной памяти абитуриента комплекс "блоков", из которых можно монтировать решение более сложных задач.

В этом выпуске рассматриваются методы решения задач, не использующие ни векторы, ни преобразования, ни координаты. И конечно же, при столь малом объеме невозможно охватить все многообразие геометрических задач. Мы ограничились лишь темами, на наш взгляд, наиболее часто встречающимися на вступительных экзаменах: решение треугольников и задачи с многоугольниками, площади, подобие, задачи с окружностями. Мы приводим также различные методические замечания: о полноте и правильности обоснований, о роли чертежа и умении им пользоваться, о дополнительных построениях, о доказательствах в решении вычислительных задач и использовании вычислений для доказательства утверждений.

§ 1. Приемы решения вычислительных задач по планиметрии

Первый из пунктов этого параграфа посвящен простейшей задаче вычислительной планиметрии – решению треугольников. Задача состоит в вычислении длин всех сторон треугольника и величин всех его углов по некоторым из них. В зависимости от данных она решается с помощью тех или иных стандартных приемов. К этой задаче часто сводятся другие, более сложные, и тогда она является элементом их решения.

Приступая к решению более сложной геометрической задачи, прежде всего нужно наметить план решения, т.е. последовательность действий, которые в конце концов приведут к нахождению требуемого ответа. Сами вычисления при этом не производятся, а лишь устанавливается возможность вычислить ту или иную величину. Три наиболее употребительных способа нахождения такого плана излагаются ниже в пунктах 1.2 – 1.4.

1.1. Решение треугольников.[1] Известные признаки равенства треугольников "по двум сторонам и углу между ними", "по стороне и двум прилежащим к ней углам", "по трем сторонам" указывают величины, знание которых позволяет однозначно определить все элементы треугольника.

Так, по известным сторонам a, b, и c с помощью теоремы косинусов находим

$$\cos\angle C=(a^2+b^2-c^2)/(2ab), \tag{1}$$

и так как на интервале $(0,\pi)$ возможных значений углов функция $y=\cos x$ монотонно убывает, то получившееся равенство позволяет однозначно определить величину угла C. Аналогично можно вычислить величины углов A и B.

По известным сторонам a, b и заключенному между ними углу C с помощью теоремы косинусов легко найти величину c, а затем, как это описывалось выше, определить величины остальных углов.

Наконец, предположим, что известна сторона a треугольника и прилежащие к ней углы B и C. Сначала, пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна π, находим величину угла A, а затем с помощью теоремы синусов определяем длины сторон b и c.

Конечно, возможны и другие способы определения сторон и углов. Заметим только, что знание синуса угла не всегда позволяет однозначно определить сам угол треугольника. Так, равенству $\sin\angle A=\frac{1}{2}$ могут удовлетворять как $\angle A=\pi/6$, так и $\angle A=5\pi/6$. Для определения величины угла в такой ситуации обычно применяются какие-либо дополнительные соображения. Например, полезной может быть информация: угол A – тупой или острый (см. замечание в п. 2.1).

1.2. Последовательное вычисление величин. Если в задаче требуется найти длину какого-либо отрезка или вычислить величину какого-либо угла, имеет смысл сначала, не проводя вычислений, определить, какие, вообще, отрезки и углы могут быть найдены, исходя из данных задачи, с помощью приемов, изложенных в п.1.1, или иных соображений. При этом можно помечать каким-либо образом вычисляемые отрезки и углы. Множество вычисляемых объектов будет при этом расширяться. И если случится так, что в их число попадет нужный отрезок или угол, то легко можно будет составить цепочку последовательных вычислений необходимых отрезков и углов, которая приведет к нахождению нужной величины. Тем самым и составится план решения задачи.

---

[1] Для удобства читателя типичные обозначения и ряд наиболее употребительных формул вынесены на последнюю страницу выпуска.

З а д а ч а 1. Выразить медиану AD треугольника ABC (рис. 1) через известные стороны a, b и c.

Р е ш е н и е . Как указано выше, можно вычислить все углы треугольника ABC. Точка D есть середина известного отрезка BC, так что могут быть вычислены и длины отрезков CD и BD. Тем самым в треугольнике ACD могут быть вычислены две стороны и заключенный между ними угол. Следовательно, можно определить все элементы треугольника ACD и, в частности, длину стороны AD. План решения составлен.

Итак, находим $CD = CB/2 = a/2$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ACD, получаем

$$m_a^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos\angle C = b^2 + a^2/4 - ab\cos\angle C.$$

Пользуясь равенством (1), имеем

$$m_a^2 = b^2 + a^2/4 - (a^2 + b^2 - c^2)/2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4.$$

О т в е т : $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

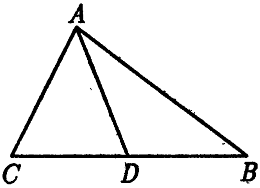


Рис. 1

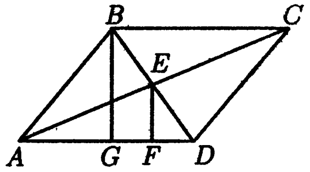


Рис. 2

1.3 Поиск решения "от искомого". Если прямой поиск, изложенный в предыдущем пункте, не помогает найти требуемую величину, можно попытаться расширить круг поисков. Нужно понять, через какие величины, известные из условия и неизвестные, можно выразить искомую величину. Затем надо понять, можно ли найти эти неизвестные величины. Если они могут быть найдены, то опять можно составить план решения – последовательность вычислений, дающую в конце ответ задачи.

З а д а ч а 2. Величина угла A параллелограмма $ABCD$ равна $\pi/6$, а меньшая диагональ BD равна 13. Точка E – пересечение диагоналей параллелограмма – удалена от прямой AD на расстояние $11/2$. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма, если известно, что $AD > AB$.

Р е ш е н и е . Пусть F – основание перпендикуляра, проведенного из точки E на прямую AD (рис. 2). Тогда $EF = 11/2$. Поскольку диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам, то отрезок AE является медианой треугольника ABD и $AC = 2AE$. Итак, для решения задачи достаточно определить стороны AB и AD треугольника ABD и его медиану AE. Более того, достаточно определить только стороны, ведь задача – вычислить медиану треугольника по его сторонам – уже решена (см. задачу 1). Напомним, что в треугольнике ABD известны сторона $BD = 13$ и противолежащий ей угол $\angle A = \pi/6$. Этих данных недостаточно для определения сторон треугольника. Но знание отрезка EF позволит нам дополнительно найти высоту h_b треугольника ABD. Проведем высоту BG треугольника ABD. В треугольнике BDG отрезок EF есть средняя линия, так что $BG = 2EF = 11$. Теперь в прямоугольном треугольнике BDG известны катет BG и гипотенуза BD, а в прямоугольном треугольнике ABG известны катет BG и острый угол A. Все это позволяет вычислить требуемые отрезки. Предварительный анализ задачи закончен.

Проведем теперь решение задачи с учетом найденных величины $BG = 11$ и соотношения $AC = 2AE$. Из прямоугольных треугольников BDG и ABG находим

$$DG = \sqrt{BD^2 - BG^2} = 4\sqrt{3}, AG = BG : \operatorname{tg}\angle A = 11\sqrt{3}, AB = BG : \sin\angle A = 22.$$

Тогда

$$AD = AG + DG = 15\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Пользуясь формулой из ответа задачи 1, получаем

$$AC = 2AE = \sqrt{2AB^2 + 2AD^2 - BD^2} = \sqrt{2149}.$$

Ответ: Стороны параллелограмма равны 22 и $15\sqrt{3}$, бо́льшая диагональ равна $\sqrt{2149}$.

Заметим, что диагональ параллелограмма можно было бы вычислить с помощью теоремы о том, что *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

1.4 Введение неизвестных. Иногда, нарисовав чертеж и отметив на нем все данные величины, а также определив все величины, которые могут быть вычислены с помощью указанных выше соображений, все-таки не удается найти требуемые в задаче отрезки или углы. В этой ситуации может помочь следующий прием. Обозначим какой-нибудь буквой, скажем буквой x, неизвестный отрезок или угол, а затем отметим все углы и отрезки, которые могут быть выражены через x с помощью приведенных в п.п. 1.2 и 1.3 соображений. Тогда может случиться так, что один и тот же отрезок или угол имеет два различных выражения. Приравняв их, получим уравнение, корнем которого будет искомая величина.

Задача 3. В трапеции длина средней линии равна 4, углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длину меньшего основания трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 1.

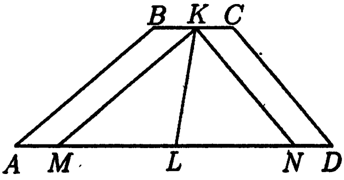


Рис. 3

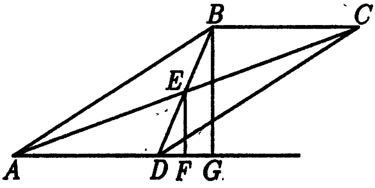


Рис. 4

Решение. Пусть $ABCD$ – заданная трапеция (рис. 3), $\angle A = 40°$, $\angle D = 50°$, точки K и L – середины оснований трапеции, так что $KL = 1$. Обозначим длину меньшего основания BC трапеции буквой x. Тогда $BK = KC = x/2$. *Длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований*, поэтому $4 = (AD + BC)/2$ и, следовательно, $AD = 8 - BC = 8 - x$. Проведем из точки K отрезки KM параллельно BA и KN параллельно CD. *Если две прямые l и m пересекаются третьей прямой, то образующиеся при этом соответственные углы равны тогда и только тогда, когда l и m параллельны.* Поэтому $\angle KMN = \angle A = 40°$, $\angle KNM = \angle D = 50°$. Далее, четырехугольник $ABKM$ – параллелограмм, так что $AM = BK = x/2$ и, значит, $ML = AL - AM = (8 - x)/2 - x/2 = 4 - x$. По аналогичным соображениям имеем $LN = 4 - x$. Итак, отрезок KL является медианой в треугольнике MKN, в котором нам известны два угла, прилежащие к стороне MN и длина этой стороны, выраженная через x. Теперь можно выразить через x все элементы треугольника MKN, и, в частности, длину медианы KL. Поскольку эта длина задана в условии задачи, в результате получится уравнение относительно x, из которого и определится x. В данном случае вычисления упрощаются, поскольку $\angle MKN = 180° - (40° + 50°) = 90°$, т.е. треугольник MKN прямоугольный.

Как известно, *центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы*, поэтому L есть центр окружности, описанной вокруг треугольника MKN, а ML, LN и KL – ее радиусы. Итак, имеем уравнение $4-x=1$, из которого находим $x=3$. Следовательно, $BC=x=3$.

Ответ: 3.

Иногда удобно использовать не одну, а большее число неизвестных.

§ 2. Роль чертежа в решении геометрических задач

2.1. Неоднозначность чертежа. О том, что хороший чертеж облегчает решение задачи, известно всем. Он может и подсказать какое-либо геометрическое соотношение между отрезками или углами. Особенно, если нарисовать несколько чертежей, изменяя размеры присутствующих на нем фигур. Но иногда чертеж может стать причиной неполного решения задачи, так как соотношения, выполняющиеся на нем и кажущиеся совершенно очевидными, в действительности таковыми не являются и требуют специального обоснования.

Так, выше мы намеренно провели неполное решение задачи 2. Если Вы не обнаружили пробел при первом чтении, попробуйте внимательно просмотреть это решение еще раз, прежде чем читать дальше. На рис. 2 точка G расположена на отрезке AD. Но почему чертеж был нарисован именно так? Ведь, вообще говоря, возможна и ситуация, изображенная на рис. 4, тогда вместо равенства (2) надо использовать равенство $AD=AG-DG$. А, может быть, точка G совпадает с точкой D? В действительности в условиях задачи 2 единственно возможной является конфигурация, изображенная на рис. 2. Ведь в условии сказано, что AD – бо́льшая сторона параллелограмма, так что $AD>AB$. Так как в треугольнике *против большей стороны лежит больший угол*, то в треугольнике ABD имеем неравенство $\angle ABD>\angle ADB$. Поскольку *сумма углов треугольника равна* π, то угол ADB не может быть ни прямым, ни тупым и, следовательно, возможна только ситуация, изображенная на рис. 2. Это рассуждение или подобные ему являются обязательной частью изложенного решения задачи 2, так как они обосновывают равенство (2).

В рассматриваемой ниже задаче 13 можно нарисовать различные чертежи, и рассуждения для каждого случая будут иметь некоторые отличия, хотя ответ будет одним и тем же. А в задаче 6 возможны две ситуации и два разных ответа.

Итак, всегда пытайтесь изобразить все возможные конфигурации, отвечающие на первый взгляд условиям задачи, а затем с помощью рассуждений отбросьте лишние. Иногда этому помогают попытки провести в других ситуациях уже найденное в одном из возможных случаев решение. Так, если, следуя рассуждениям из решения задачи 2, определить длины отрезков AB и AD в случае, изображенном на рис. 4, то окажется, что нарушается условие $AD>AB$. Это доказывает другим способом невозможность в условиях задачи рис. 4.

2.2 Дополнительные построения. Отметим, что нарисованный первоначально чертеж в процессе решения задачи может дополняться новыми линиями. Такие дополнительные построения, вводящие новые углы и новые отрезки, иногда приводят к появлению геометрических фигур, облегчающих решение задачи. А иногда и указывают выход из казалось бы неразрешимой ситуации. Выше использовались дополнительные построения при решении задач 2 и 3. Будут они применяться и далее. Так в решении задач 7, 9 и 14 строятся дополнительные прямые, в задачах 11, 12 и 13 – дополнительные углы, в задаче 10 – дополнительная окружность. Отметим, что умение находить самостоятельно удачное дополнительное построение приходит с опытом решения задач.

В следующих параграфах на примерах задач из различных разделов геометрии, будет показано, как применяются высказанные выше соображения.

§ 3. Площади

Задачи на вычисление площадей различных фигур встречаются на вступительных экзаменах достаточно часто. Площади многоугольников обычно вычисляют, разбивая их на треугольники, прямоугольники и другие фигуры, для площадей которых имеются известные формулы. Напомним, что *площадь прямоугольника равна произведению длин двух его соседних сторон, площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту, площадь круга радиуса r равна* πr^2.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны u и v. Найти его площадь, если угол между диагоналями четырехугольника равен α.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный в условии задачи четырехугольник (рис. 5), $AC=u$, $BD=v$, O – точка пересечения его диагоналей, $\angle AOB=\alpha$. Площадь S четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABO, OBC, DOC и AOD. Так как синусы всех четырех углов, образованных при пересечении прямых AC и BD, равны $\sin\alpha$ и площадь треугольника равна половине произведения длин его сторон на синус угла между ними, то

$$S=\frac{1}{2}\sin\alpha(AO\cdot BO+BO\cdot CO+CO\cdot DO+DO\cdot AO)=$$
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha(BO\cdot AC+DO\cdot AC)=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{2}uv\sin\alpha$.

Доказанное в последней задаче утверждение о том, что *площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними,* часто применяется в более сложных ситуациях как вспомогательный результат.

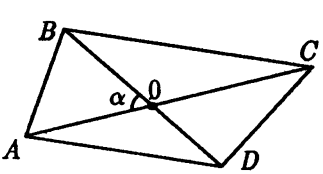


Рис. 5

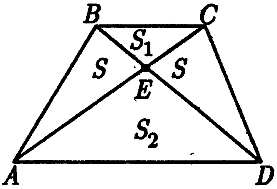


Рис. 6

Задача 5. Диагонали трапеции $ABCD$ делят ее на четыре треугольника. Площади двух треугольников, прилегающих к основаниям трапеции BC и AD, равны соответственно S_1 и S_2. Найти площади треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

Решение. Обозначим буквой E – точку пересечения диагоналей трапеции (рис. 6). Из формулы, выражающей площадь треугольника через его основание и высоту следует, что *треугольники, у которых равны основания и высоты, имеют равные площади.* Поэтому имеем равенство $S_{ABD}=S_{ACD}$. Справедливы равенства $S_{ABE}=S_{ABD}-S_{AED}$ и $S_{CDE}=S_{ACD}-S_{AED}$, из которых следует, что треугольники ABE и CDE, прилегающие к боковым сторонам трапеции имеют равные площади. Обозначим эту площадь буквой S. Из упомянутой выше формулы для площади треугольника следует, что *если треугольники имеют равные высоты, то их площади относятся так же, как и основания.* Применяя это утверждение к двум парам треугольников BEC и EDC, а также ABE и AED, находим

$$\frac{S_1}{S}=\frac{S_{BEC}}{S_{EDC}}=\frac{BE}{ED},\ \frac{S}{S_2}=\frac{S_{ABE}}{S_{AED}}=\frac{BE}{ED}.$$

Из равенства $S_1/S=S/S_2$ следует, что $S^2=S_1S_2$ и, значит, $S=\sqrt{S_1S_2}$.

Ответ: $\sqrt{S_1S_2}$ и $\sqrt{S_1S_2}$.

Иногда использование площадей помогает при решении задач, на первый взгляд относящихся совершенно к другим вопросам.

Задача 6. В угол с вершиной C вписана окружность, отрезок AB с концами на сторонах угла касается этой окружности. Найти радиус окружности, если известно, что $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$.

Решение. Вообще говоря, возможны две ситуации, изображенные на рис. 7 и рис. 8. На этих рисунках точка O есть центр заданной окружности, а E, F и G – точки касания окружности с прямыми CA, AB и CB соответственно. В первом случае речь идет о выражении радиуса r вписанной в треугольник окружности через его стороны, а во втором – о выражении радиуса ρ так называемой вневписанной окружности. Обозначим также буквой S площадь треугольника ABC.

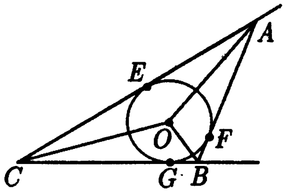


Рис. 7

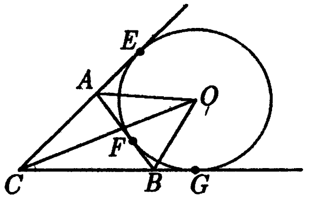


Рис. 8

Рассмотрим сначала первый случай (рис. 7). *Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной,* поэтому отрезки OE, OF и OG – высоты соответственно треугольников AOC, AOB и BOC, проведенные из вершины O. Но тогда

$$S_{AOC}=\frac{1}{2}rAC=\frac{1}{2}rb,\quad S_{AOB}=\frac{1}{2}rAB=\frac{1}{2}rc,\quad S_{BOC}=\frac{1}{2}rBC=\frac{1}{2}ra$$

и, значит,

$$S=S_{AOC}+S_{BOC}+S_{AOB}=\frac{1}{2}r(b+a+c)=rp,$$

где p – полупериметр треугольника ABC. Пользуясь формулой Герона для площади треугольника (см. последнюю страницу), находим искомое выражение

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad (3)$$

Во втором случае (рис. 8), как легко проверить, справедливы те же самые выражения для площадей треугольников AOC, AOB и BOC, но в этом случае имеет место иное соотношение между площадями

$$S=S_{AOC}+S_{BOC}-S_{AOB}=\frac{1}{2}\rho(b+a-c)=\rho(p-c),$$

из которого находим

$$\rho=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}. \qquad (4)$$

Выражения (3) и (4) дают ответ задачи.

§ 4. Подобие

Одним из важных средств нахождения в процессе решения задачи соотношений между отрезками или углами является свойство подобия фигур. Ведь в подобных фигурах *соответственные углы равны, а стороны пропорциональны.* Имеются признаки подобия треугольников: *1) по двум углам; 2) по двум соответственно пропорциональным сторонам и заключенному между ними углу; 3) по трем пропорциональным сторонам.* Заметим также, что в подобных треугольниках отношение соответственных высот, медиан и биссектрис равно отношению соответственных сторон треугольников, т.е. *коэффициенту подобия.*

Задача 7. Пусть E – точка пересечения боковых сторон трапеции $ABCD$. Через точку E и точку пороесечения диагоналей трапеции проведена прямая, пересекающая большее основание AD трапеции в точке F. Найти отношение $AF:FD$.

Решение. Обозначим буквой G точку пересечения диагоналей трапеции и проведем через нее прямую KL параллельно основаниям трапеции (рис. 9). По свойствам углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, имеем $\angle BKG=\angle BAD$, $\angle BGK=\angle BDA$. Треугольники KBG и ABD имеют, таким образом, по два соответственно равных угла. Значит, они подобны. Обозначим буквой h расстояние между параллельными прямыми BC и KL, а буквой H – расстояние между параллельными прямыми BC и AD. Тогда h и H – высоты в подобных треугольниках KBG и ABD, проведенные из общей вершины B. Как указывалось выше, отношение соответственных высот в подобных треугольниках равно отношению соответственных сторон, поэтому $\frac{KG}{AD}=\frac{h}{H}$. Аналогично доказывается подобие треугольников GCL и ACD и равенство $\frac{GL}{AD}=\frac{h}{H}$. Из этих равенств следует, что $KG=GL$.

Как и выше, доказываются равенства углов: $\angle EGK=\angle EFA$ и $\angle EGL=\angle EFD$. С учетом доказанных ранее равенств получаем, что подобны треугольники KEG и AEF, а также треугольники GEL и FED. Подобие означает равенства отношений сторон $\frac{KG}{AF}=\frac{EG}{EF}$ и $\frac{GL}{FD}=\frac{EG}{EF}$. Так как правые части этих отношений равны, то равны и их левые части. Учитывая же доказанное ранее равенство $KG=GL$, заключаем, что $AF=FD$, т.е. искомое отношение равно 1.

Ответ: 1.

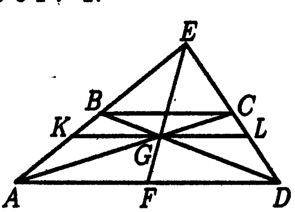


Рис. 9

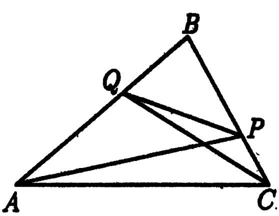


Рис. 10

Задача 8. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. По условию треугольник ABC остроугольный, значит, $\cos\angle B>0$. Из прямоугольных треугольников ABP и BCQ (рис. 10) находим

$$BP:AB=\cos\angle B,\quad BQ:BC=\cos\angle B.$$

Из этих равенств следует, что треугольники BPQ и ABC подобны (по двум соответственно пропорциональным сторонам и углу между ними), причем коэффициент подобия равен $\cos\angle B$. Так как *отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия*, то

$$\cos^2\angle B = S_{BPQ}:S_{ABC} = 1/9.$$

и, следовательно, $\cos\angle B = \frac{1}{3}$. Из подобия треугольников ABC и BPQ вытекает равенство $\frac{PQ}{AC} = \cos\angle B = \frac{1}{3}$, откуда $AC = 3\cdot PQ = 6\sqrt{2}$.

По теореме синусов (см. последнюю страницу) $2R = AC:\sin\angle B = 9$, откуда R=9/2.

Ответ: 9/2.

Приведем еще одну теорему, полезную в тех ситуациях, когда по заданным отношениям отрезков требуется вычислить отношение каких-либо других отрезков: *стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные части.*

Задача 9. Внутри треугольника ABC взята точка F. Прямые AF и BF пересекают стороны треугольника в точках E и D соответственно (рис. 11). Известно, что $AD:DC = m$, $EC:BE = n$. Найти отношение $AF:FE$.

Решение. Проведем через точку E прямую EG параллельно BD. Тогда две параллельные прямые EG и BD пересекают стороны двух углов EAC и ACB, так что по сформулированной выше теореме имеем отношения $\frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DG}$ и $\frac{GC}{DG} = \frac{EC}{BE} = n$. Из последнего соотношения следует, что $\frac{DC}{DG} = 1 + \frac{GC}{DG} = 1 + n$, так что $\frac{AD}{DG} = \frac{AD}{DC}\cdot\frac{DC}{DG} = m(1+n)$.

Ответ: $m(1+n)$.

§ 5. Окружность

В задачах с окружностями часто бывает необходимым вычислять не только длины отрезков и площади фигур, но и величины различных углов. В то же время проведение вспомогательных окружностей часто облегчает вычисление углов и в задачах о "некруглых" фигурах. Это вычисление, конечно же, требует знания стандартных теорем школьного курса геометрии, а приемы таких вычислений подобны изложенным в § 1.

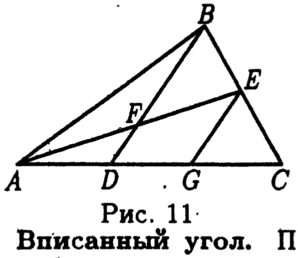


Рис. 11

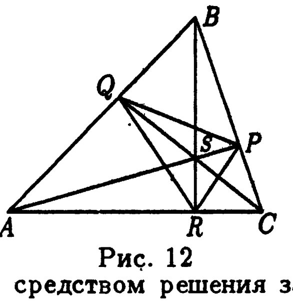


Рис. 12

5.1. Вписанный угол. Полезным средством решения задач о вписанных фигурах является теорема, утверждающая, что *вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.* Из этой теоремы легко следуют два часто используемых утверждения: *1) вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны* и *2) вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма двух его противоположных углов равна π.*

З а д а ч а 10. В остроугольном треугольнике величины углов равны α, β и γ. Найти величины углов треугольника с вершинами в основаниях высот, опущенных из всех вершин данного треугольника.

Р е ш е н и е . Пусть ABC – заданный в условии задачи треугольник; P, R и Q – основания высот треугольника (рис. 12). Будем считать, что вершины треугольника обозначены таким образом, что $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$ и $\angle C=\gamma$. Как известно, *высоты треугольника пересекаются в одной точке.* Обозначим ее буквой S. Задача состоит в том, чтобы найти углы треугольника PRQ.

Нам известны все углы треугольника ABC. Какие еще углы могут быть выражены через известные величины α, β и γ? Согласно условию, отрезок AP перпендикулярен BC. Поэтому треугольник ABP – прямоугольный и $\angle BAP=\pi/2-\angle ABP=\pi/2-\beta$. Аналогично могут быть вычислены все углы, на которые высоты треугольника делят его углы при вершинах.

Для того чтобы продолжить вычисления углов, заметим, что в четырехугольнике $AQSR$ противоположные углы AQS и ARS равны $\pi/2$, так что их сумма равна π и вокруг четырехугольника $AQSR$ можно описать окружность (рис. 12). Два угла QRS и QAS, вписанные в эту окружность, опираются на одну и ту же дугу QS. Поэтому $\angle QRS=\angle QAS=\angle BAP=\pi/2-\beta$. Аналогично могут быть вычислены и все углы, на которые высоты треугольника ABC делят углы при вершинах треугольника PRQ, в частности, $\angle PRS=\pi/2-\beta$. Но тогда $\angle PRQ=\angle PRS+\angle QRS=\pi-2\beta$. Проводя такие же вычисления, получаем, что два других угла треугольника PRQ равны $\pi-2\alpha$ и $\pi-2\gamma$.

О т в е т : $\pi-2\alpha$, $\pi-2\beta$, $\pi-2\gamma$.

Возможно и иное решение этой задачи, основанное на подобии треугольников. Напомним, что в задаче 8 с помощью подобия было доказано, что треугольник BPQ подобен треугольнику ABC и, в частности, $\angle BQP=\angle C=\gamma$, $\angle BPQ=\angle BAC=\alpha$. Но точно так же можно доказать, что и треугольники PRS, AQR подобны треугольнику ABC, и получить равенства $\angle RPC=\alpha$, $\angle PRC=\angle ARQ=\beta$, $\angle AQR=\gamma$. Но тогда $\angle PQR=\pi-(\angle BQP+\angle AQR)=\pi-(\gamma+\gamma)=\pi-2\gamma$ и, аналогично, $\angle QPR=\pi-2\alpha$, $\angle PQR=\pi-2\beta$.

5.2. Угол между касательной и хордой. *Угол между касательной и хордой, проведенными из одной точки, измеряется половиной дуги, стягиваемой этой хордой.* Пусть величина центрального угла, опирающегося на дугу AB равна α (рис. 13). Тогда из равнобедренного треугольника AOB находим $\angle ABO=(\pi-\alpha)/2$ и так как *радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной,* то $\angle ABD=\pi/2-\angle ABO=\alpha/2$.

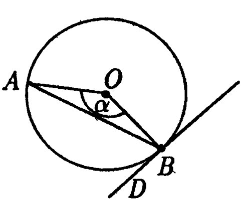


Рис. 13

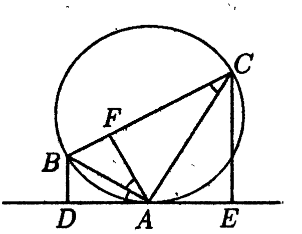


Рис. 14

З а д а ч а 11. Прямая касается окружности в точке A, отрезок BC – диаметр окружности. Найти расстояние от точки A до диаметра, если концы диаметра удалены от касательной на расстояния a и b.

Р е ш е н и е . Соединим точку касания A с концами диаметра BC. Основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C на касательную, обозначим буквами D и E соответственно (рис. 14), тогда пусть $BD=a$, $CE=b$. Обозначим буквами D и E соответственно (рис. 14), тогда пусть $BD=a, CE=b$. Обозначим буквой F основание перпендикуляра, проведенного из точки A на диаметр. Нам необходимо найти длину отрезка AF.

Обозначим буквой α величину угла ACB и выразим через α величины других углов, изображенных на рис. 14. Поскольку BC – диаметр, то треугольник ABC прямоугольный. Значит, $\angle ABC=\pi/2-\alpha$. Из прямоугольного треугольника ABF находим $\angle BAF=\pi/2-\angle ABC=\alpha$. Согласно приведенной выше теореме о величине угла между касательной и хордой, можно утверждать, что $\angle BAD=\angle BCA=\alpha$. Прямоугольные треугольники ABD и ABF имеют общие гипотенузы и по равному острому углу. Это означает, что они равны и, следовательно, $BF=BD=a$. Аналогично доказывается, что $CF=CE=b$. Так как прямоугольные треугольники ABF и AFC имеют по равному острому углу ($\angle BCA=\angle BAF=\alpha$), то они подобны и, следовательно, $BF:AF=AF:CF$. Отсюда находим $AF^2=BF\cdot CF=ab$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

5.3. Теоремы о касательных.

Задача 12. Две окружности пересекаются в точках P и Q. На прямой PQ взята точка A, через которую проведена прямая, касающаяся одной из окружностей в точке B. Найти длину касательной AC к другой окружности, если известно, что $AB=1$.

Решение. Заданные окружности и касательные изображены на рис. 15. Отметим, что это не единственный возможный чертеж. Однако во всех случаях решения проводятся одинаково. Решение задачи основано на следующем полезном свойстве касательной к окружности: *квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть*. Это утверждение, примененное к касательной AB к первой окружности, означает равенство $AB^2=AP\cdot AQ$. Оно же, примененное к касательной AC ко второй окружности, дает $AC^2=AP\cdot AQ$. Сравнивая правые части этих равенств, получаем $AC=AB=1$.

Осталось доказать сформулированное выше свойство касательной: $AB^2=AP\cdot AQ$. Угол BPQ вписан в окружность, опирается на дугу BQ и, следовательно, измеряется половиной этой дуги. Угол ABQ между касательной AB и хордой BQ также измеряется половиной дуги BQ. Значит, $\angle BPA=\angle ABQ$. Помимо этих равных углов треугольники ABP и ABQ имеют еще общий угол BAQ. Следовательно, эти треугольники подобны и, в частности, $AQ:AB=AB:AP$. Итак, $AB^2=AP\cdot AQ$. Нужное равенство доказано.

Ответ: 1.

Отметим еще две полезные теоремы о касательных к окружности: *1) касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны; 2) выпуклый четырехугольник описан около окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.*

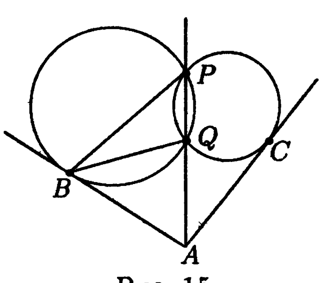


Рис. 15

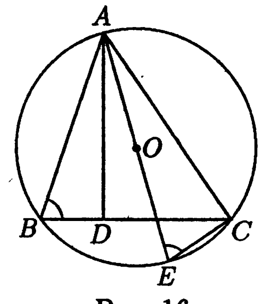


Рис. 16

§ 6. Применение вычислений для доказательства утверждений

Этот выпуск посвящен вычислительным задачам планиметрии. Однако заметим, что изложенные выше приемы иногда могут служить целям доказательства различных геометрических утверждений. Так, выше при решении задачи 10 фактически установлено, что высоты остроугольного треугольника ABC служат биссектрисами углов другого треугольника PRQ (его вершины есть основания высот треугольника ABC). В задаче 7 доказано, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам. Приведем еще один пример, когда вычисления помогают доказательству.

Задача 13. Доказать, что высота треугольника, опущенная из вершины A, и радиус описанной окружности, проведенный в эту же вершину, образуют равные углы соответственно со сторонами AB и AC.

Решение. Обозначим буквой O центр описанной окружности и буквой D - основание высоты, опущенной из вершины A на основание BC (рис. 16). Требуется доказать, что $\angle BAD=\angle OAC$. На чертеже изображен случай, когда точка D принадлежит отрезку BC. Мы проведем доказательство именно в этой ситуации. Случаи, в которых точка D попадает на продолжение или в концы отрезка BC, имеют незначительные отклонения в рассуждениях, и мы предлагаем рассмотреть их самостоятельно.

Обозначим $\alpha=\angle BAD$, $\beta=\angle OAC$ и попробуем выразить через α и β величины других углов с тем, чтобы получить некоторое соотношение межу α и β. Треугольник BAD прямоугольный. Поэтому $\angle ABD=\pi/2-\alpha$. Продолжим радиус AO до пересечения с окружностью в точке E. Углы ABC и AEC опираются на одну дугу AC, так что их величины равны, т.е. $\angle AEC=\angle ABD=\pi/2-\alpha$. Отрезок AE - диаметр окружности, поэтому треугольник AEC прямоугольный. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $\pi/2$, так что $\beta+(\pi/2-\alpha)=\pi/2$. Отсюда следует, что $\beta=\alpha$. Требуемое равенство углов доказано.

§ 7. Общие замечания об оформлении решения

Если решение задачи уже найдено Вами на черновике, проверено и получен ответ, пришла пора подумать, как лучше изложить решение. Этот этап работы на экзамене не менее важен, чем поиск самого решения. В процессе подготовки полного текста решения иногда обнаруживаются некоторые пропуски в обоснованиях, логические, а иногда и вычислительные ошибки.

Решение каждой геометрической задачи обязательно содержит два элемента: доказательство и вычисление. Ведь каждая формула справедлива в определенных условиях и наличие этих условий необходимо обосновать ссылками на соответствующие теоремы и определения. Частой ошибкой на экзамене является неполное обоснование и даже полное отсутствие обоснований некоторых утверждений. Иногда абитуриенты используют выражения “очевидно”, “ясно”, “легко видеть”. Подобный стиль совершенно недопустим. Все доказательства должны быть исчерпывающими.

Существенное требование к хорошему изложению: чертеж в геометрической задаче должен быть описан в ее решении. Это значит, что в решении должны быть указаны все выполненные Вами дополнительные построения, определены все не заданные условием задачи, а введенные Вами на чертеже буквы, должны быть рассмотрены все возможные способы размещения точек, отрезков, окружностей и обосновано выбранное Вами их расположение[2]. Имеет смысл в процессе написания решения задать себе вопросы: почему я нарисовал чертеж именно таким образом, возможно ли иное размещение заданных в условии задачи фигур и т.п.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Внутри треугольника ABC взята точка D. Прямые AD, BD и CD пересекают стороны треугольника в точках E, F и G соответственно. Известно, что $AG:GB=m$, $BE:EC=n$. Найти отношение $CF:FA$.

Задача 2. Доказать, что биссектриса треугольника делит пополам угол между высотой треугольника и радиусом описанной окружности, проведенными из той же вершины.

Задача 3. На дуге окружности, стягиваемой хордой AD, взяты точки B и C. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке E, лежащей на хорде AD. Найти длину хорды AD, если $AB=a$ и $CD=b$.

Задача 4. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Из точки A, лежащей на первой окружности и вне второй, проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Доказать, что касательная к первой окружности, проведенная в точке A, параллельна прямой AB.

Задача 5. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

Задача 6. Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найти радиус окружности, если $\angle PKL=\pi/3$ и точка пересечения прямых KP и QL находится от точек P и Q на расстояниях, равных 1.

Задача 7. В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найти площадь треугольника BOK.

Задача 8. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Доказать, что EM – медиана треугольника CED и найти ее длину, если $AD=8, AB=4$ и $\angle CDB=\alpha$.

Задача 9. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

Задача 10. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведен перпендикуляр MK к стороне AC треугольника ABC (точка K – основание этого перпендикуляра).

---

[2] Еще раз обратите внимание на обоснование чертежа к задаче 2, приведенное в § 2.

Найти величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $KMBC$ равна s.

Задача 11. Около круга радиуса r описана прямоугольная трапеция, наименьшая из сторон которой равна $\frac{3}{2}r$. Определить площадь трапеции.

Задача 12. К двум окружностям радиусов R и r, находящимся в положении внешнего касания, проведены их общие касательные – внутренняя и две внешние. Определить длину отрезка внутренней касательной, заключенного между внешними касательными.

Задача 13. Параллельные стороны трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

Задача 14. По заданным $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$ треугольника ABC найти угол между медианой и высотой, проведенными из вершины C.

Ответы: 1) $\frac{1}{mn}$; 3) $a+b$; 5) 1 и 7; 6) 1; 7) $\frac{1}{2}(p-a)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 8) $2\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+3}$; 9) 1; 10) $\arccos\sqrt{2(1-s)}$; 11) $\frac{9}{2}r^2$; 12) $2\sqrt{Rr}$; 13) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; 14) $\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)$.

Основные обозначения и формулы

В треугольнике ABC обозначаются:

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – углы и величины углов,

a, b, c, – длины сторон, противолежащих вершинам A, B, C соответственно.

h_a, m_a, l_a – длины высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A. Аналогично обозначаются длины остальных высот, медиан и биссектрис.

R, r – величины радиусов описанной и вписанной окружностей.

S_{ABC} – площадь треугольника.

Между этими величинами существует ряд соотношений, позволяющих в случае необходимости вычислять одни из них по известным другим.

$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$.

Теорема синусов: $2R=\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$.

Теорема косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$.

$h_a=b\sin\angle C$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\angle C$.

Справедлива также следующая формула Герона

$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=(a+b+c)/2$.

Можно получить и иные соотношения, если в теореме косинусов и в последующих соотношениях поменять местами любые две из трех пар $(a, \angle A)$, $(b, \angle B)$ или $(c, \angle C)$.

Соотношения, справедливые для прямоугольного треугольника (далее считаем $\angle C=\pi/2$, т.е. c – гипотенуза): $a=c\sin\angle A$, $b=c\cos\angle A$, $a=b\operatorname{tg}\angle A$, теорема Пифагора: $a^2+b^2=c^2$.